POCU/784/6/24/139636 - INFOACCES

Numerele naturale. Sistemele de numerație zecimal, binar și hexazecimal

Grigore Albeanu, *expert suport educațional*

Obiective:

- *Revederea noțiunilor, aprofundarea terminologiei și fixarea tehnicilor de calcul*
- *Recuperare și accelerarea învățării*

Noțiuni de bază

Numerele se scriu folosind simboluri.
Uzual se lucrează cu cifre ale sistemului de numerație zecimal 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Sistemul utilizat este unul pozițional. De la dreapta la stânga putem nota pozițiile cu 0, 1, 2, 3, 4, … ș.a.m.d.
Dacă utilizăm puterile lui 10 atunci reținem că 10^0=1 (o unitate), 10^1=10 (zece), 10^2 = 100 (o sută), 10^3 = 1000 (o mie), 10^4 = 10000 (zece mii), 10^5 = 100000 (o sută de mii), 10^6 = 1000000 (un milion), etc.
Deci poziția cifrei indică un anumit ordin al unei clase.
Clasele sunt grupuri de câte 3 ordine, separate de la dreapta la stânga - clasa unităților compusă din ordinul unităților, ordinul zecilor și ordinul sutelor, clasa miilor compusă din mii, zeci de mii și sute de mii, clasa milioanelor, clasa miliardelor, etc.
Astfel 123456 se citește “*o sută douăzeci și trei de mii patru sute cincizeci și șase*”.

În exerciții ne interesează să determinăm numere cu un anumit număr de cifre (o anumită lungime) care au anumite proprietăți, precum -

- Numerele sunt *impare* (ultima cifră poate fi 0, 2, 4, 6 sau 8)
- Numerele sunt *pare* (ultima cifră poate fi 1, 3, 5, 7, 9)
- Numerele sunt *multipli* de 5 (ultima cifră este 0 sau 5)
- Numerele sunt *multipli* de 3 (suma cifrelor este multiplu de 3)
- Alte proprietăți (de exemplu, sunt de lungime 4 și au cifra unităților egală cu cifra miilor)
- Alte exerciții ne permit să lucrăm cu numere care fac parte dintr-un șir de numere format pe baza unei reguli. De exemplu *șirul lui Fibonacci* începe cu numerele 0 și 1, iar apoi orice termen din șir este suma celor doi termeni anteriori lui - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc.

În informatică este util să se lucreze cu *sistemul binar* (simbolurile utilizate sunt 0 și 1), iar în loc de puteri ale lui 10 vom lucra cu *puteri ale lui 2* (baza de numerație este 2).
Reamintim că $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ etc.

De asemenea, tot în informatică se lucrează și cu *sistemul hexazecimal* (simbolurile utilizate sunt 0, 1, …, 9, A, B, C, D, E, F) și se lucrează cu *puteri ale lui 16* (baza de numerație este 16), precum $16^0 = 1$, $16^1 = 16$, $16^2 = 256$, $16^3 = 4096$ etc.

Sistemele poziționale au avantajul că putem face operații cu numere la nivelul ordinului. În momentul când se depășește cifra maximă se realizează transport la ordinul superior.

Complemente și exerciții

1. Succesorul unui număr n este n+1. Numărul n este predecesorul lui n+1. Se spune că n și n+1 sunt numere consecutive.
   Determinați succesorul numărului natural 123. Care este predecesorul numărului 140? Care este succesorul numărului (1011) scris în sistem binar? Dar predecesorul lui (1010)? Care este succesorul numărului (A3) scris în sistem hexazecimal. Dar, predecesorul numărului (100) scris în baza 16?
   Rezolvare
   - succ(123) = 124, pred(140) = 139.
   - succ(1011)=1100, pred(1010)=1001.
   - succ(A3)=A4, pred(100)=FF.

2. Dacă a, b, c sunt numere naturale scrise în baza 10, calculează (abc+bca+cab):111, știind că a + b + c = 2. Rezolvare. Folosind descompunerea numerelor după puteri ale lui 10, avem abc = a x 100 + b x 10 +c, bca = bx 100+cx10+a și cab = cx 100 +ax10+b. Suma celor 3 termeni este (a+b+c)(100+10+1)=111(a+b+c), deci numărul este divizibil cu 111 și furnizează câtul a+b+c. Rezultatul operației este 2.

3. Să se scrie în baza 10 numărul binar a = (11010). Rezolvare. a = $1x2^4+1x2^3+1x2^1$=16+8+2=26.

4. Să se scrie în baza 10 numărul hexazecimal b = (FA). Rezolvare. B = $Fx16^1+Ax16^0$ = 15x16+10 = 250.

5. Scrierea unui număr natural a ca sumă de puteri ale lui 2 revine la a determina reprezentarea în baza 2 a numărului n. Dacă reprezentarea are m poziții, notate 0, 1, …, m-1, iar cifrele binare sunt în șirul a, atunci n este suma termenilor ak x 2^k, pentru k=0, 1, …, m-1. În acest fel, prin împărțiri succesive la 2 obținem câtul (ce se va împărți apoi) și cifrele începând cu ordinul 0, 1, ..., De exemplu 72 = 1 x 64 + 1x 8 = $1x2^6+1x2^3$ = (1001000).

6. Indiferent de baza de numerație se pot realiza operații precum adunare, scădere, înmulțire, împărțire, determinarea restului, determinarea câtului, ridicare la putere. Trebuie reținute următoarele proprietăți
   - Adunarea numerelor naturale este comutativă (nu contează ordinea în care adunăm termenii)
   - Adunarea numerelor naturale este asociativă (putem grupa termenii de la stânga la dreapta sau de la dreapta la stânga a+b+c = (a+b)+c = a + (b+c))
   - Adunarea cu zero nu schimbă rezultatul. Zero este element neutru.
   - Înmulțirea numerelor naturale este comutativă (nu contează ordinea în care înmulțim factorii)
   - Înmulțirea numerelor naturale este asociativă (putem grupa factorii de la stânga la dreapta sau de la dreapta la stânga a*b*c = (a*b)*c = a * (b*c))
   - Înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de adunare a*(b+c)=a*b+a*c.
   - Scăderea numerelor naturale conduce la diferența c dintre descăzutul a și scăzătorul b (c = a-b, adică a = b+c).
   - Înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de scădere a*(b-c)=a*b-a*c.
   - În momentul în care se restrâng termenii, adică a*b+a*c devine a*(b+c), respectiv a*b-a*c devine a*(b-c) spunem că am dat pe a factor comun.
   - Împărțirea deîmpărțitului a la împărțitorul b produce câtul c și restul r, cu condiția ca r să fie mai mic ca b. Perechea (c, r) este unică astfel încât a = b*c+r. Dacă r este nul spunem

că împărțirea este exactă (a se divide prin b) și ca a este multiplu de b, sau că b este divizor al lui a.

- Ridicarea la puterea n a unui număr natural este o înmulțire repetată cu n factori egali cu numărul dat (a^n = a*a*...*a, de n ori). a^1=a, a^0 = 1(a diferit de zero, 0^0 nu este definit).

7. Exemple de exerciții în care utilizăm proprietățile de mai sus
   - Să se calculeze 2a+5b+3c dacă a+b=x și b+c =y. Aplicați pentru diferite perechi (x, y). Rezolvare. 2a+5b+3c=2a+2b+3b+3c=2(a+b)+3(b+c)=2x+3y.
     Pentru (x, y) din mulțimea (10, 20), (100, 105) se obțin rezultatele 80, respectiv 515.
   - Se consideră șirul termenilor a1 = 2x1+1, a2=2x2+1, …, a40=2x40+1. Să se calculeze suma S a celor 40 de termeni. Rezolvare. S = 2(1+2+3+...+40)+40x1 = 2x20x41+40=1640+40=1680.
   - Puterea a doua a numerelor naturale conduce la pătrate perfecte, deci a este pătrat perfect dacă există x astfel încât a = x^2. Pătratele perfecte se termină cu una din cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9. Dacă un număr are ca ultimă cifră 2, 3, 7, 8 atunci sigur nu poate fi pătrat perfect, altfel este candidat la a fi pătrat perfect dar trebuie verificat. Este evident că un produs de pătrate perfecte este tot pătrat perfect, orice număr ridicat la o putere pară este pătrat perfect, iar orice pătrat perfect ridicat la orice putere este tot pătrat perfect. În plus, între două pătrate perfecte consecutive nu există un alt pătrat perfect.
   - Regulile de calcul cu puteri ne ajută să rezolvăm rapid exerciții în care avem puteri. $a^m * a^n = a^{(m+n)}$, $a^m : a^n = a^{(m-n)}$, $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{(m*n)}$.
   - Dintre două puteri ale aceleiași baze, este mai mare cea care are exponentul mai mare. Dacă a, m și n sunt numere naturale astfel încât m > n, atunci $a^m > a^n$. Dintre două puteri cu același exponent, este mai mare cea la care baza este mai mare. Dacă a, b și n sunt numere naturale astfel încât a > b, atunci $a^n > b^n$.
   - Ordinea efectuării operațiilor - Expresiile din paranteze, Ridicare la putere, Înmulțirea și împărțirea, adunarea și scăderea.

Exerciții de antrenament

- Selecție din manualele de Matematică pentru clasa a V-a, în funcție și de manualul de la clasă al elevilor.

Manuale (https://manuale.edu.ro/)

1. Alexandrescu C., Birta A.C., Olteanu C.T., Matematică, clasa a V-a, Editura CDPress, 2017.
2. Andrei L., Călinescu M., Drăghici A., Popa M., Matematică, clasa a V-a, Editura Sigma, 2017.
3. Gologan R (coord.), Matematică, clasa a V-a, Editura Corint, 2017.
4. Marinescu M., Pelteacu I., Petrescu E., Matematică, clasa a V-a, Editura Aramis, 2017.
5. Perianu M., Stănică C., Smărăndoiu Ș., Matematică, clasa a V-a, Editura Art, 2017.